1-12-21 9η Διάλεξη

Λ. Urysohn

$E, F \subseteq X$ κλειστά και ξένα. Τότε, $\exists f: X \to [0,1]$ συνεχής τ.ω. $f|_E \equiv 0$, $f|_F \equiv 1$

Θ (Διαμέριση της μονάδας)

Έστω (X,d) τοπικά συμπαγής μ.χ. A συμπαγές $V_1, V_2, \dots, V_n$ ανοιχτά τ.ω. $A \subseteq V_1 \cup \dots \cup V_n$. Τότε, για $i = 1, \dots, n$ $\exists f_i: X \to \mathbb{R}$ τ.ω

(i) $0 \leq f_i \leq 1$

(ii) $supp(f_i) \subseteq V_i$ και $supp(f_i)$ συμπαγές

(iii) $\left(\sum_{1}^{n} f_i\right)|_A \equiv 1$

(*) Θυμίζουμε ότι $\mathrm{supp}(f) = \{x \in X : f(x) \neq 0\} \to$ Φορέας f

<u>Λήμμα</u>: $A \subseteq V \subseteq X$, A συμπαγές, V ανοιχτό τότε $\exists\, O \subseteq X$, O ανοιχτό τ.ω $\bar{O}$ συμπαγές και $A \subseteq O \subseteq \bar{O} \subseteq V$

<u>Απόδειξη Θεωρήματος</u>

Έστω $x \in A$. Τότε, $\exists\, i \in \{1, \dots, n\}$ τ.ω $x \in V_i \xRightarrow[\{x\}\text{συμπ.}]{\Lambda}$ $\exists\, U_x \ni x$, U_x ανοιχτό και $\bar{U}_x \subseteq V_i$ και $\bar{U}_x$ συμπαγές

• $\{U_x : x \in A\}$ ανοιχτή κάλυψη του $A \Rightarrow \exists\, x_1, \dots, x_m$ τ.ω $\bigcup_{j=1}^{m} U_{x_j} \supseteq A$ (ΔΛΔ η ένωση να καλύπτει το A) Θέτουμε ανοιχτά $O_i = \bigcup_{j \in \{1, \dots, m\}} U_{x_j}$ τ.ω $\bar{U}_{x_j} \subseteq V_i$, $i = 1, \dots, n$

Τότε, $\bar{O}_i$ συμπαγές και $\bar{O}_i \subseteq V_i$ και $A \subseteq \bigcup_{i}^{n} O_i$

ΔΛΔ έχουμε ισχυριστεί ότι $\exists$ $\bigcup_{j=1}^{m} U_{x_j} \supseteq A$
$O_1, \dots, O_n$ ανοιχτά τ.ω $\bar{O}_i \subseteq V_i$, $\bar{O}_i$ συμπαγές, $i = 1, \dots, n$
$\bigcup_{i=1}^{n} O_i \supseteq A$. Για το λήμμα του Ur. Θέλουμε 2 σύνολα

Το 1ο είναι το O_i. Θα ορίσουμε (στο ενδιάμεσο) ένα B_i:

Άρα, από Λήμμα 

$\exists$ B_i ανοιχτό τ.ω

B_i συμπαγές και $\overline{O_i} \subseteq B_i^{\circ} \subseteq B_i \subseteq V_i$, $i=1,\dots,n$
$\Rightarrow \overline{O_i}$, B_i^c κλειστά και ξένα $\xRightarrow{\text{Λ.Ur.}}$
$\exists\, g_i : X \to [0,1]$ συνεχής τ.ω.
$g_i|_{\overline{O_i}} \equiv 1$, $g_i|_{B_i^c} \equiv 0$

• A, $\left(\bigcup_i^n O_i\right)^c$ κλ. ⊕ ξένα $\xRightarrow{\text{Ur.}}$ $\exists\, h : X \to [0,1]$ συνεχής τ.ω. $h|_A \equiv 1$ και $h|_{(\cup O_i)^c} \equiv 0$.

Ορίζω $f_i := \dfrac{g_i}{(1-h) + \sum_i^n g_i}$ με παρανομ. $\neq 0$

αφού:

Έστω ότι $(1-h) + \sum_i^n g_i(x) = 0$ τότε $(1-h)(x) = 0$ και $\sum g_i(x) = 0$ αφού είναι μη αρνητικές.

$\Rightarrow (1-h)(x) = 0 = g_1(x) = \dots = g_n(x)$

$\Rightarrow x \notin \left(\bigcup_{i=1}^n O_i\right)^c$, $x \notin \overline{O_i}$, $i=1,\dots,n$

$\Rightarrow x \in \bigcup_1^n U_i$, $x \notin \overline{O_i}$, $i=1,\dots,n$

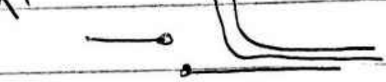
$\Rightarrow x \in \bigcup_i^n \overline{O_i}$, $x \notin \overline{O_i}$, $i=1,\dots,n$ Άτοπο

Άρα f_i καλώς ορισμένη και συνεχής ως πράξη συνεχών για όλα τα i.

Επίσης, $0 \le f_i \le 1$, $\operatorname{Supp}(f_i) = \overline{\{x \in X : f_i(x) \neq 0\}} \subseteq \overline{O_i} \subseteq V_i$
αφού $g_i \geq 0$ αφού $g_i \le (1-h) + \sum g_i$
$\overline{O_i}$ συμπ.
$\Rightarrow \operatorname{Supp}(f_i)$ συμπαγές.

$(1-h)|_A \equiv 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} f_i|_A = \frac{\sum g_i|_A}{\sum g_i|_A} = 1.$

(*) Ερώτηση: Αν f_n συνεχής $\forall n\in\mathbb{N}$ κ' $f_n \xrightarrow{κσ} f \Rightarrow f$ συνεχής;
Απάντηση: Όχι



Πχ

$f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$

$$f(x)=\begin{cases} 0, & |x|<1 \\ 1/2, & |x|=1 \\ 1, & |x|>1 \end{cases}$$

Αν $|x|>1$ τότε $x^{2n}\to\infty$ και

$f(x)=\frac{1}{\frac{1}{x^{2n}}+1}$. Δλδ συγκλίνει αλλά $f(x)$ δεν είναι συνεχής

(*) Θεώρημα: Αν $f_n: X\to\mathbb{R}$ ακολουθία συνεχών συν/σεων τ.ω. $f_n \xrightarrow{ομ} f$, τότε f συν.

Απόδειξη

Έστω $\varepsilon>0$. $f_n \xrightarrow{ομ} f \Rightarrow \exists n_0\in\mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n\geq n_0$ $\forall x\in X$
$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon/3 \Rightarrow$

$\forall x\in X$, $|f_{n_0}(x)-f(x)|<\varepsilon/3$ (*)

• f_{n_0} συνεχής $\Rightarrow$ Για $x_0\in X$, $\exists\,\delta>0$ τ.ω. $\forall x\in X$ με $d(x,x_0)<\delta$ να ισχύει $|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)|<\varepsilon/3$ (**)

• Για $x\in X$ τ.ω. $d(x,x_0)<\delta$ έχω $|f(x)-f(x_0)| =$
$= |f(x)-f_{n_0}(x)|+|f_{n_0}(x)-f(x_0)| \leq$

$\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x) - f(x)|$

$\leq \underbrace{|f(x) - f_{n_0}(x)|}_{< \varepsilon/3} + \underbrace{|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)|}_{< \varepsilon/3} + \underbrace{|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)|}_{< \varepsilon/3} < \varepsilon$

<u>Πόρισμα</u>: Έστω (X,d) συμπαγής μ.χ. Τότε ο $(C(X), D_\infty)$ με $D_\infty(f,g) = \|f-g\|_\infty$ (= μετρική αφού δεν απειρίζεται) είναι πλήρης.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $\{f_n\} \subseteq C(X)$ Cauchy ως προς D_∞ $\xRightarrow[\text{Θεωρ}]{\text{Προτ}}$ $\exists\ f: X \to \mathbb{R}$ τ.ω $f_n \xrightarrow{D_\infty} f$ $\xRightarrow{\text{Θ.}}$ $\exists\ f \in C(X)$ τ.ω $f_n \xrightarrow{D_\infty} f$ $\Rightarrow$ Άρα, πλήρης.

<u>Πχ</u> $f_n, f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ 1/2, & x = 1 \\ 1, & |x| > 1 \end{cases}$$

$f_n \xrightarrow{κσ} f$ Αφού όλες οι f_n είναι συνεχής και το όριο δεν είναι, Δεν συγκλίνει ομοιόμορφα

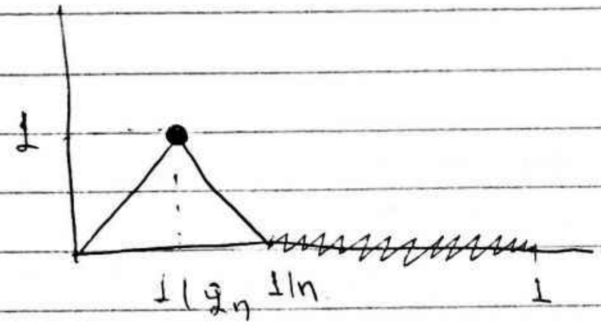
(*) Ερώτημα: Έστω (X,d) συμπαγής, f_n συνεχής $\forall n \in \mathbb{N}$ και $f_n \xrightarrow{κσ} f$, f συνεχής τότε $f_n \xrightarrow{ομ} f$?

Απάντηση: Αν όχι συμπαγής $f_n \not\xrightarrow{ομ} f$

Πχ $X = (0,1)$ $f_n(x) = 1/nx$, $f(x) \equiv 0$

Αν είναι συμπαγής τότε $f_n \overset{ομ}{\not\to} f$. Δλδ ισχύει το αντίστροφο του Θεωρήματος.

Πχ $f_n(x) = \begin{cases} 2nx, & 0 \le x \le 1/2n \\ -2nx+2, & 1/2n \le x \le 1/n \\ 0, & 1/n < x \le 1 \end{cases}$ με $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$



(*) 2 προϋποθέσεις εκ των οποίων η 1 είναι γνωστή κ' το συμπέρασμα

$\Leftarrow$

(*) Μόνο συμπέρασμα $\not\Rightarrow$

Ορισμός: $f_n : X \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα φραγμένη αν $\exists\, M>0$ τ.ω $|f_n(x)| \le M \ \forall x \in X \ \forall n \in \mathbb{N}$

(*) Στο πάνω παράδειγμα είναι η $f_n(x)$ ομ. φραγ. Επίσης, είναι ακολ. συνεχών συν. σε συμπαγή χώρο. Είπαμε ότι $f_n \xrightarrow{κ.σ.} 0$ διότι για $x \in (0,1] \Rightarrow$

$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $\frac{1}{n_0} < x \Rightarrow$

$\forall n \ge n_0 \ x \in [1/n, 1] \Rightarrow \forall n \ge n_0,\ f_n(x) = 0 \Rightarrow f_n(x) \to 0$

Για $x=0$: $f_n(0) = 2n \cdot 0 \to 0 \Rightarrow \forall x \in [0,1],\ f_n(x) \to 0$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow{κ.σ.} 0$

Όμως $f_n \overset{ομ.}{\not\to} 0$. Έστω ότι $f_n \to 0$.

Για $\varepsilon = 1$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall n \ge n_0 \ \forall x \in [0,1],\ |f_n(x) - 0| < 1$

ή $f_n(x) < 1$ Άτοπο διότι διότι $f_{n_0}(1/2n_0) = 1$ από σχήμα.

Ορισμός: Η ακολουθία $\{f_n\}$ ($f_n : X \to \mathbb{R}$) ονομάζεται αύξουσα (αντ. φθίνουσα) αν $\forall x \in X \ \forall n \in \mathbb{N}$ ισχύει $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ για σταθερό x.

Θ(Dini): Έστω (X,d) συμπαγής μ.χ. και $\{f_n\}$ μια μονότονη ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $: X \to \mathbb{R}$. Αν $\{f_n\}$ συγκλίνει κ.σ. σε κάποια συνεχή $f: X \to \mathbb{R}$, τότε $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$

Απόδειξη

Έστω πχ $\{f_n\}$ αύξουσα. Θυμίζω ότι το όριο μιας αυξ. ακ. είναι $>$ της ακολ.
Άρα, Θέτω: $E_n := \{x \in X : \underbrace{f(x) - f_n(x)}_{g_n(x)} < \varepsilon\}, n \in \mathbb{N}$

Για $x \in X$, $f_n(x) \leq \lim\limits_n f_n(x) = f(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (επειδή η $\{f_n(x)\}$ είναι αύξουσα). $\Rightarrow g_n \geq 0$ και $\{g_n\}$ φθιν.
Επίσης, E_n ανοιχτό διότι:

$E_n^c = \{x \in X : g_m(x) \geq \varepsilon\}$. Έστω $\{x_m\}$ ακολ. από το E_n^c τ.ω. $x_m \to x \to g_n(x_m) \geq \varepsilon \xrightarrow{\text{θm συν}}$

$$\underbrace{\lim g_m(x_m)}_{\geq \varepsilon} = g_m(\lim_m x_m) = g_n(x) \Rightarrow x \in E^c$$

$\Rightarrow E_m^c$ κλειστό $\Rightarrow E_m$ ανοιχτό.

Για $x \in X$, $f_n(x) \leq \lim\limits_n f_n(x) = f(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(επειδή η $\{f_n(x)\}$ είναι αύξουσα) $\Longrightarrow g_n \geq 0$
και επίσης $\{g_n\}$ φθίνουσα.

Ισχυρισμός: $\{E_n : n \in \mathbb{N}\}$ κάλυψη του X.
Έστω $x \in X$. Τότε, $g_n(x) \xrightarrow{n \to \infty} 0$.
$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0$ $-\varepsilon < g_n(x) < \varepsilon \Rightarrow g_{n_0}(x) < \varepsilon$
$\Rightarrow x \in E_{n_0} \subseteq \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} E_n \Rightarrow$ είναι κάλυψη.

$\Rightarrow \{E_n : n \in \mathbb{N}\}$ ανοιχτή κάλυψη του X.

$\xRightarrow{\text{Xσυμπ.}}$ $\exists$ πεπερ. πλήθους $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ τ.ω $X = \bigcup_{j=1}^{k} E_{n_j}$

• Έστω $x \in E_n \Longrightarrow g_n(x) < \varepsilon \xRightarrow{\{g_n\}\downarrow} g_{n+1}(x) < \varepsilon$

$\Longrightarrow x \in E_{n+1}$. Άρα, $E_n \subseteq E_{n+1}$.

Άρα, αν $N = \max\{n_1, \dots, n_k\}$ έχω $\bigcup_{j}^{k} E_{n_j} = E_N \Rightarrow$ $\boxed{E_N = X} \Longrightarrow$

$\forall\, x \in X,\ f(x) - f_N(x) < \varepsilon \xRightarrow{\{f_n\}\uparrow}$

$\forall\, x \in X,\ \forall\, n \geq N$ $-\varepsilon \leq 0 \leq f(x) - f_n(x) < \varepsilon \Longrightarrow$

— // — $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$